अध्याय 9

वृत्त

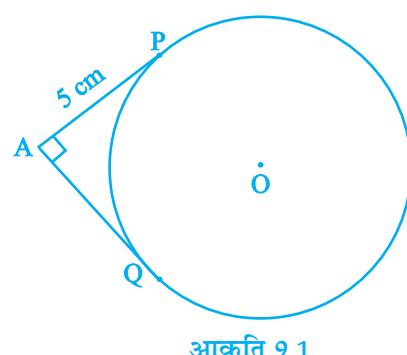
(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- वृत्त पर स्पर्श रेखा और उसके स्पर्श बिंदु का अर्थ।
- स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से होकर खींची गई त्रिज्या पर लंब होती है।
- किसी बाहरी बिंदु से वृत्त पर केवल दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
- किसी बाहरी बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

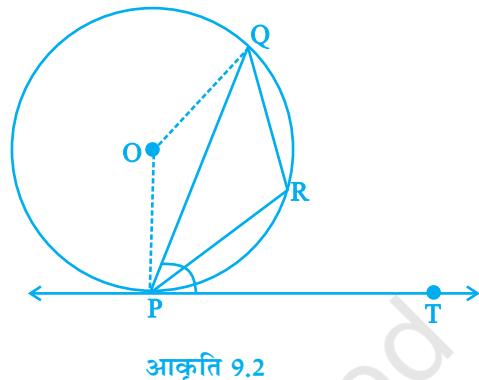
प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि वृत्त की दो त्रिज्याओं के बीच का कोण 130º हो, तो इन त्रिज्याओं के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण है :

(A) 90º (B) 50º (C) 70º (D) 40º

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: आकृति 9.1 में, केंद्र O वाले वृत्त पर एक बाहरी बिंदु A से खींची गई स्पर्श रेखाएँ AP और AQ परस्पर लंब हैं तथा प्रत्येक स्पर्श रेखा की लंबाई 5 cm है। तब, वृत्त की त्रिज्या है

(A) 10 cm (B) 7.5 cm

(C) 5 cm (D) 2.5 cm

आकृति 9.1

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 3: आकृति 9.2 में, PQ वृत्त की एक जीवा है तथा PT बिंदु P पर एक स्पर्श रेखा इस प्रकार है कि $\angle QPT = 60°$ है। तब, $\angle PRQ$ बराबर है

(A) 135° (B) 150°
(C) 120° (D) 110°

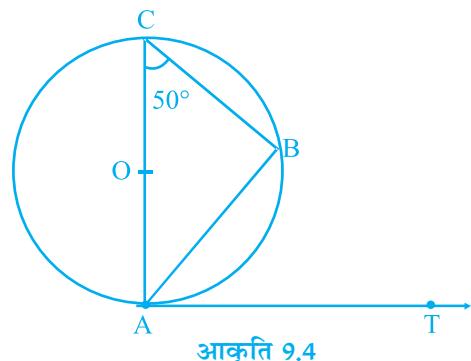
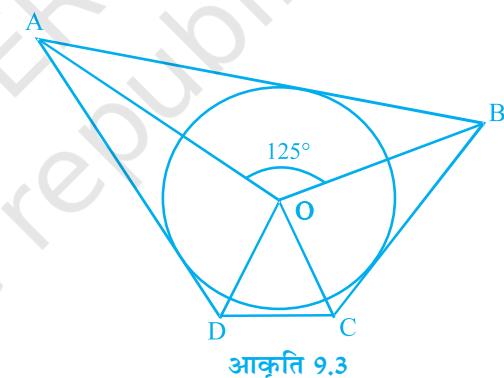
आकृति 9.2

हल : उत्तर (C)

[**संकेत** : $\angle OPQ = \angle OQP = 30°$, अर्थात् $\angle POQ = 120°$ है। साथ ही, $\angle PRQ = \frac{1}{2}$ प्रतिवर्ती $\angle POQ$ है।]

प्रश्नावली 9.1

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. यदि दो संकेंद्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 4 cm और 5 cm हैं, तो एक वृत्त की प्रत्येक उस जीवा की लंबाई, जो दूसरे वृत्त पर स्पर्श रेखा है, निम्नलिखित होगी

(A) 3 cm (B) 6 cm
(C) 9 cm (D) 1 cm

आकृति 9.3

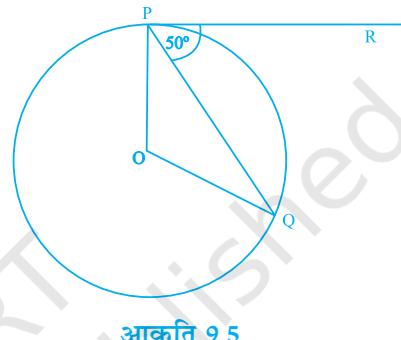
2. आकृति 9.3 में, यदि $\angle AOB = 125°$ है, तो $\angle COD$ बराबर है

(A) 62.5° (B) 45°
(C) 35° (D) 55°

3. आकृति 9.4 में, AB एक वृत्त की जीवा है तथा AOC वृत्त का व्यास इस प्रकार है कि $\angle ACB = 50°$ है। यदि AT बिंदु A पर वृत्त की स्पर्श रेखा है, तो $\angle BAT$ बराबर है

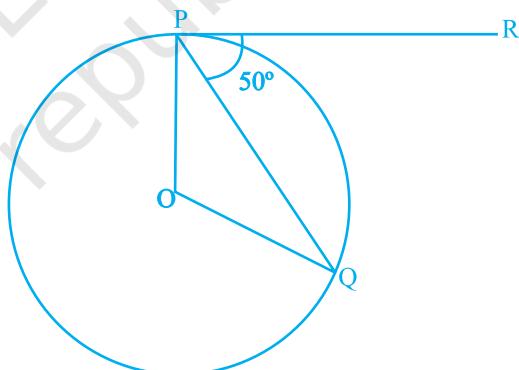
(A) 65° (B) 60°
(C) 50° (D) 40°

आकृति 9.4

4. किसी बिंदु P से, जो त्रिज्या 5 cm वाले एक वृत्त के केंद्र O से 13 cm की दूरी पर है, वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PQ और PR खींची गई हैं। तब चतुर्भुज PQOR का क्षेत्रफल है

(A) 60 cm^2 (B) 65 cm^2 (C) 30 cm^2 (D) 32.5 cm^2

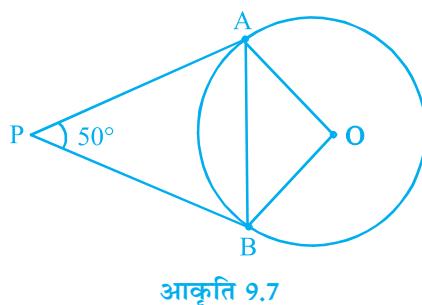
5. किसी 5 cm त्रिज्या वाले वृत्त के एक व्यास AB के एक सिरे A पर स्पर्श रेखा XAY खींची गई है। XY के समांतर तथा A से 8 cm की दूरी पर, जीवा CD की लंबाई है

(A) 4 cm (B) 5 cm

(C) 6 cm (D) 8 cm

6. आकृति 9.5 में, AT केंद्र O वाले वृत्त पर एक स्पर्श रेखा इस प्रकार है कि OT = 4 cm और ∠OTA = 30° है। तब, AT बराबर है

(A) 4 cm (B) 2 cm

(C) $2\sqrt{3}$ cm (D) $4\sqrt{3}$ cm

आकृति 9.5

7. आकृति 9.6 में, यदि O वृत्त का केंद्र है, PQ एक जीवा है तथा P पर खींची गई स्पर्श रेखा PR जीवा PQ के साथ 50° का कोण बनाती है, तो ∠POQ बराबर है

(A) 100° (B) 80°

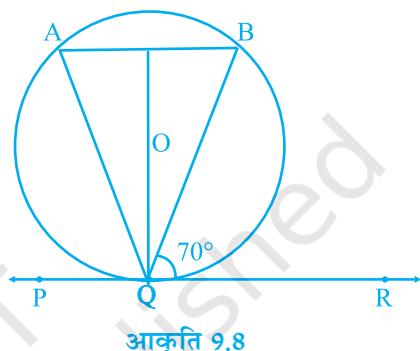
(C) 90° (D) 75°

आकृति 9.6

8. आकृति 9.7 में, यदि PA और PB केंद्र O वाले वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि ∠APB = 50° हैं, तब ∠OAB बराबर है

(A) 25° (B) 30°

(C) 40° (D) 50°

आकृति 9.7

9. यदि त्रिज्या 3cm वाले एक वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ ऐसी खींची जाएँ कि उनके बीच का कोण 60° हो, तो प्रत्येक स्पर्श रेखा की लंबाई होगी

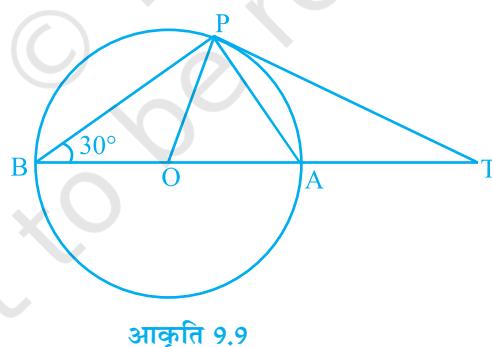
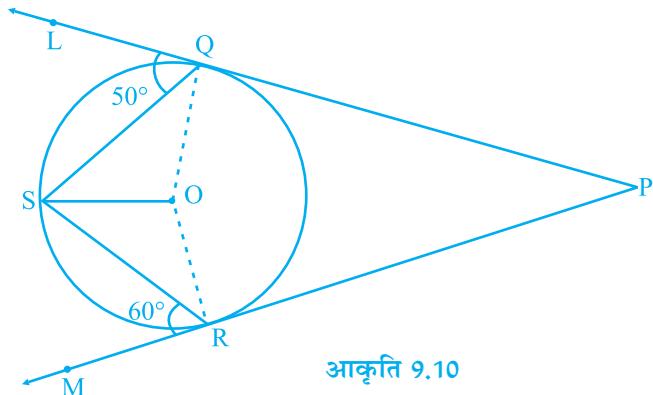
(A) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm (B) 6 cm

(C) 3 cm (D) $3\sqrt{3}$ cm

10. आकृति 9.8 में, यदि PQR केंद्र O वाले वृत्त की बिंदु Q पर स्पर्श रेखा है, AB रेखा PR के समांतर एक जीवा है तथा $\angle BQR = 70°$ है, तो $\angle AQB$ बराबर है

(A) 20° (B) 40°

(C) 35° (D) 45°

आकृति 9.8

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

'सत्य' या 'असत्य' लिखिए और अपने उत्तर का कारण दीजिए।

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : आकृति 9.9 में, BOA वृत्त का एक व्यास है तथा एक बिंदु P पर खींची गई स्पर्श रेखा बढ़ाई गई BA से T पर मिलती है। यदि $\angle PBO = 30°$ है, तो $\angle PTA$ भी 30° के बराबर है।

आकृति 9.9

हल : सत्य। क्योंकि $\angle BPA = 90°$ है, इसलिए $\angle PAB = \angle OPA = 60°$ है। साथ ही, $OP \perp PT$ है। अत:, $\angle APT = 30°$ और $\angle PTA = 60° - 30° = 30°$ है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 9.10 में, PQL और PRM केंद्र O वाले वृत्त की बिंदुओं Q और R पर क्रमश: स्पर्श रेखाएँ हैं तथा S इस वृत्त पर एक बिंदु इस प्रकार स्थित है कि $\angle SQL = 50°$ और $\angle SRM = 60°$ है। तब, $\angle QSR = 40°$ है।

आकृति 9.10

हल : असत्य। यहाँ $\angle OSQ = \angle OQS = 90° - 50° = 40°$ है तथा $\angle RSO = \angle SRO = 90° - 60° = 30°$ है। अतः, $\angle QSR = 40° + 30° = 70°$ है।

प्रश्नावली 9.2

निम्नलिखित में से प्रत्येक में, 'सत्य' या 'असत्य' लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

1. यदि एक जीवा AB वृत्त के केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करती (बनाती) है, तो A और B पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण भी 60° होगा।

2. किसी बाहरी बिंदु से एक वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लंबाई सदैव उसकी त्रिज्या से बड़ी होती है।

3. केंद्र O वाले वृत्त पर किसी बाहरी बिंदु P से खींची गई स्पर्श रेखा की लंबाई OP से सदैव छोटी होती है।

4. वृत्त की दो स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण 0° हो सकता है।

5. यदि किसी बिंदु P से त्रिज्या a और केंद्र O वाले वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण 90° है, तो $OP = a\sqrt{2}$ होता है।

6. यदि किसी बिंदु P से त्रिज्या a और केंद्र O वाले वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण 60° है, तो $OP = a\sqrt{3}$ होता है।

7. AB = AC वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC के शीर्ष A पर त्रिभुज के परिवृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा भुजा BC के समांतर होती है।

8. यदि एक दिए हुए रेखाखंड PQ को कई वृत्त बिंदु A पर स्पर्श करते हैं, तो उनके केंद्र PQ के लंब समद्विभाजक पर स्थित होते हैं।

9. यदि कई वृत्त एक रेखाखंड PQ के अंत बिंदुओं P और Q से होकर जाते हैं, तो उनके केंद्र PQ के लंब समद्विभाजक पर स्थित होते हैं।

10. AB एक वृत्त का व्यास है और AC उसकी एक जीवा इस प्रकार है कि $\angle BAC = 30°$ है। यदि C पर खींची गई स्पर्श रेखा बढ़ाई गई AB से D पर मिलती है, तो BC = BD होगा।

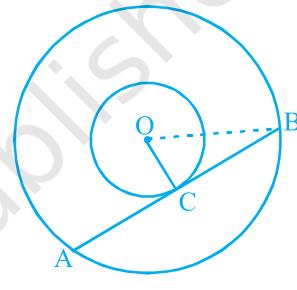
(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

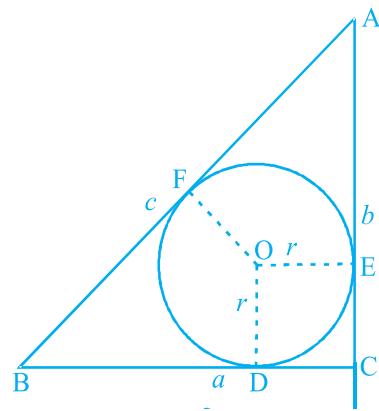
प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि d_1 और d_2 $(d_2 > d_1)$ दो संकेंद्रीय वृत्तों के व्यास हैं तथा c एक वृत्त की उस जीवा की लंबाई है, जो दूसरी वृत्त की स्पर्श रेखा है, तो सिद्ध कीजिए कि $d_2^2 = c^2 + d_1^2$ है।

हल : मान लीजिए कि एक वृत्त की जीवा AB है जो दूसरे वृत्त की C पर स्पर्श रेखा है। तब, ΔOCB एक समकोण त्रिभुज है (देखिए आकृति 9.11)। पाइथागोरस प्रमेय से, $OC^2 + CB^2 = OB^2$

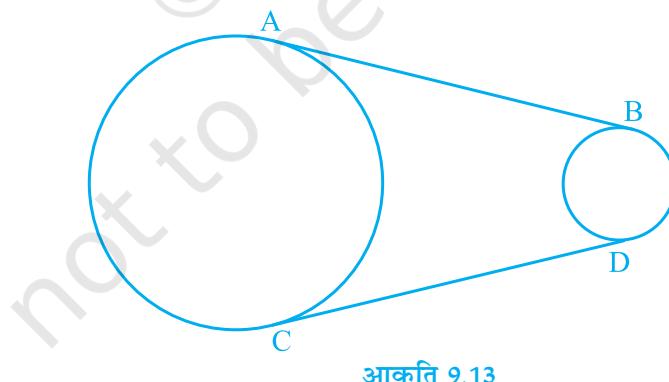
आकृति 9.11

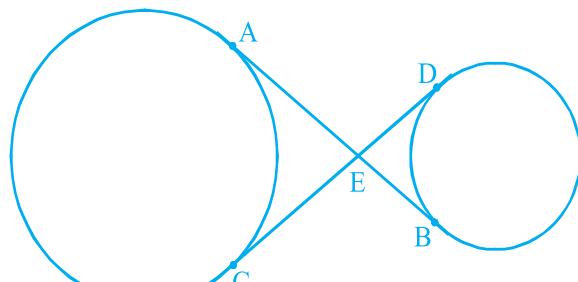
अर्थात्, $$\left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 = \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2$$

(क्योंकि C जीवा AB को समद्विभाजित करता है)

अतः, $d_2^2 = c^2 + d_1^2$ है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : यदि a, b, c किसी समकोण त्रिभुज की भुजाएँ हैं, जिनमें से c कर्ण है, तो सिद्ध कीजिए कि उस वृत्त की त्रिज्या r, जो इस त्रिभुज की भुजाओं को स्पर्श करता है, $r = \frac{a+b-c}{2}$ से प्राप्त होती है।

हल : मान लीजिए कि वृत्त समकोण त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB को क्रमशः D, E और F पर स्पर्श करता है, जहाँ BC = a, CA = b और AB = c है (देखिए आकृति 9.12)। तब, AE = AF और BD = BF है। साथ ही, CE = CD = r है।

आकृति 9.12

अर्थात्, $b - r = AF$, $a - r = BF$

या $\quad AB = c = AF + BF = b - r + a - r$

इससे $\quad r = \dfrac{a+b-c}{2}$ प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 9.3

1. दो संकेंद्रीय वृत्तों में से बाहरी वृत्त की त्रिज्या 5 cm है तथा इसकी 8 cm लंबी जीवा AC आंतरिक वृत्त की स्पर्श रेखा है। आंतरिक वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

2. केंद्र O वाले एक वृत्त पर एक बाहरी बिंदु से दो स्पर्श रेखाएँ PQ और PR खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए कि QORP एक चक्रीय चतुर्भुज है।

3. यदि केंद्र O वाले एक वृत्त के एक बाहरी बिंदु B से दो स्पर्श रेखाएँ BC और BD इस प्रकार खींची जाएँ कि $\angle DBC = 120°$ है, तो सिद्ध कीजिए कि BC + BD = BO है, अर्थात् BO = 2BC है।

4. सिद्ध कीजिए कि दो प्रतिच्छेदी रेखाओं को स्पर्श करने वाले वृत्त का केंद्र इन रेखाओं से बने कोण के समद्विभाजक पर स्थित होता है।

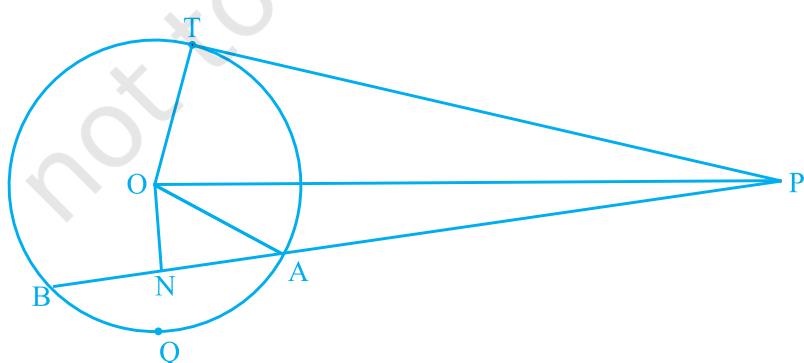
5. आकृति 9.13 में, AB और CD असमान त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि AB = CD हैं।

आकृति 9.13

6. उपरोक्त प्रश्न 5 में, यदि दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि AB = CD है।

7. आकृति 9.14 में, दोनों वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ AB और CD परस्पर बिंदु E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि AB = CD है।

आकृति 9.14

8. एक वृत्त की जीवा PQ, बिंदु R पर इस वृत्त की स्पर्श रेखा के समांतर है। सिद्ध कीजिए कि बिंदु R चाप PRQ को सम- द्विभाजित करता है।

9. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त की एक जीवा के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ उस जीवा से बराबर कोण बनाती हैं।

10. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त का एक व्यास AB उन सभी जीवाओं को समद्विभाजित करता है, जो बिंदु A से खींची गई वृत्त की स्पर्श रेखा के समांतर हैं।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

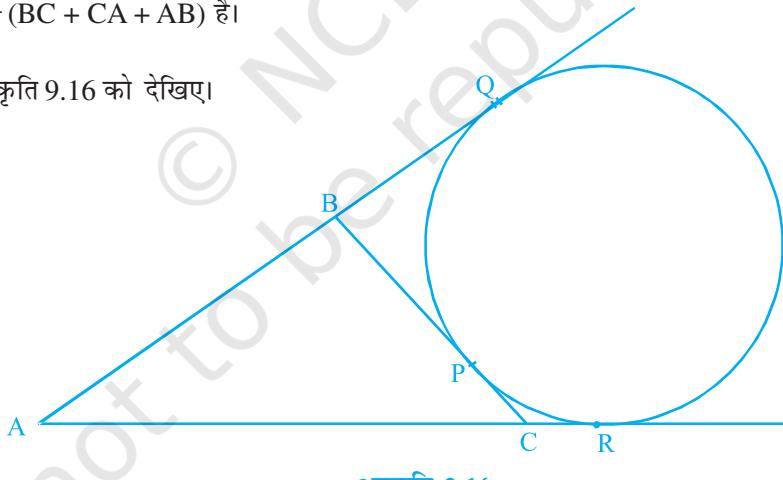
प्रतिदर्श प्रश्न 1 : आकृति 9.15 में, एक बाहरी बिंदु P से केंद्र O वाले वृत्त की एक स्पर्श रेखा PT खींची गई है और एक रेखाखंड PAB खींचा गया है। ON जीवा AB पर लंब है। सिद्ध कीजिए कि:

(i) $PA.\ PB = PN^2 - AN^2$

(ii) $PN^2 - AN^2 = OP^2 - OT^2$

(iii) $PA.PB = PT^2$

आकृति 9.15

हल :

(i) $PA.\,PB = (PN - AN)\,(PN + BN)$

$= (PN - AN)\,(PN + AN)$ (क्योंकि $AN = BN$)

$= PN^2 - AN^2$

(ii) $PN^2 - AN^2 = (OP^2 - ON^2) - AN^2$ (क्योंकि $ON \perp PN$)

$= OP^2 - (ON^2 + AN^2)$

$= OP^2 - OA^2$ (क्योंकि $ON \perp AN$)

$= OP^2 - OT^2$ (क्योंकि $OA = OT$)

(iii) (i) और (ii) से,

$PA.PB = OP^2 - OT^2$

$= PT^2$ (क्योंकि $\angle OTP = 90°$)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: यदि कोई वृत्त एक त्रिभुज ABC की भुजा BC को बिंदु P पर स्पर्श करता है तथा बढ़ाई गई भुजाओं AB और AC को क्रमश: Q और R पर स्पर्श करता है, तो सिद्ध कीजिए कि $AQ = \frac{1}{2}(BC + CA + AB)$ है।

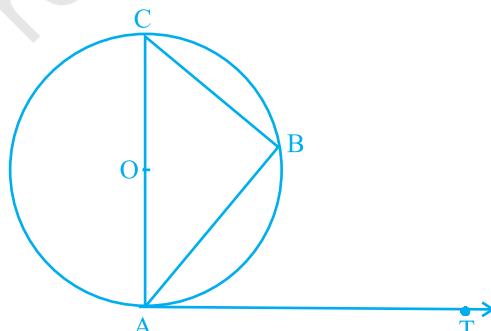
हल : आकृति 9.16 को देखिए।

आकृति 9.16

पाठ्यपुस्तक की प्रमेय 10.2 से,

$BQ = BP$

$CP = CR$, और

$AQ = AR$

अब, $2AQ = AQ + AR$

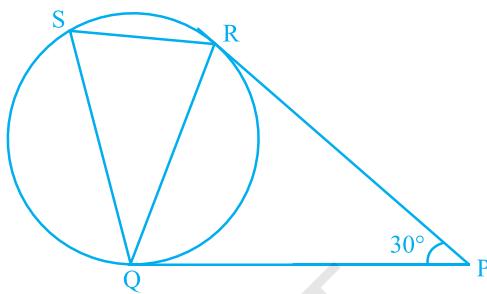
$= (AB + BQ) + (AC + CR)$

$= AB + BP + AC + CP$

$= (BP + CP) + AC + AB$

$= BC + CA + AB$

अर्थात् $AQ = \frac{1}{2}(BC + CA + AB)$

प्रश्नावली 9.4

1. यदि एक षड्भुज ABCDEF एक वृत्त के परिगत है, तो सिद्ध कीजिए कि $AB + CD + EF = BC + DE + FA$ है।

2. मान लीजिए कि s उस त्रिभुज ABC के अर्ध-परिमाप को व्यक्त करता है, जिसमें $BC = a$, $CA = b$ और $AB = c$ है। यदि एक वृत्त भुजाओं BC, CA और AB को क्रमशः D, E और F पर स्पर्श करता है, तो सिद्ध कीजिए कि $BD = s - b$ है।

3. एक बाहरी बिंदु P से केंद्र O वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ PA और PB खींची जाती हैं। वृत्त के एक बिंदु E पर एक स्पर्श रेखा खींची जाती है, जो PA और PB को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करती है। यदि PA = 10 cm है, तो त्रिभुज PCD का परिमाप ज्ञात कीजिए।

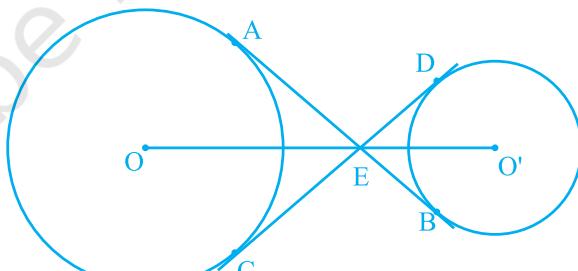
4. यदि केंद्र O वाले वृत्त की AB एक जीवा है, AOC एक व्यास है तथा AT बिंदु A पर खींची गई स्पर्श रेखा है, जैसा कि आकृति 9.17 में दर्शाया गया है। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAT = \angle ACB$ है।

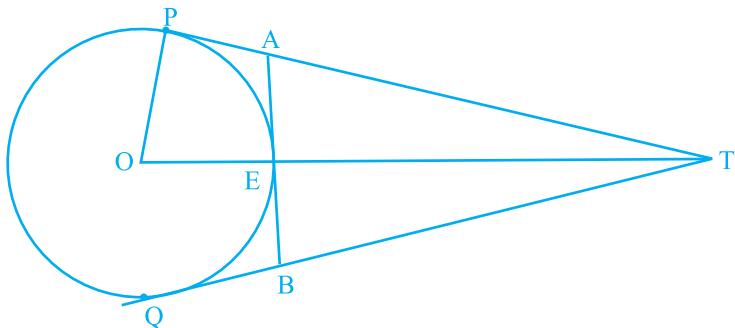
आकृति 9.17

5. केंद्रों O और O′ वाले तथा क्रमशः त्रिज्याओं 3 cm और 4 cm वाले दो वृत्त परस्पर बिंदुओं P और Q पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि OP और O′P दोनों वृत्तों की स्पर्श रेखाएँ हैं। उभयनिष्ठ जीवा PQ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

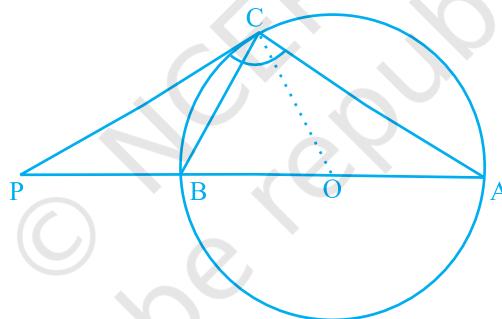
6. एक समकोण त्रिभुज ABC, जिसमें $\angle B = 90°$ है, AB को व्यास मान कर एक वृत्त खींचा गया है, जो कर्ण AC को P पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि P पर वृत्त की स्पर्श रेखा BC को समद्विभाजित करती है।

7. आकृति 9.18 में, एक वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PQ और PR इस प्रकार खींची गई हैं कि $\angle RPQ = 30°$ है। एक जीवा RS स्पर्श रेखा PQ के समांतर खींची जाती है। $\angle RQS$ ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** Q से होकर जाती हुई QP पर एक लंब रेखा खींचिए।]

आकृति 9.18

8. केंद्र O वाले किसी वृत्त का AB एक व्यास है और AC एक जीवा इस प्रकार है कि $\angle BAC = 30°$ है। C पर वृत्त की स्पर्श रेखा बढ़ाई गई AB को बिंदु D पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि BC = BD है।

9. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के एक चाप के मध्य-बिंदु पर वृत्त की स्पर्श रेखा उस चाप के सिरों को मिलाने वाली जीवा के समांतर होती है।

आकृति 9.19

10. आकृति 9.19 में, केंद्रों O और O′ वाले दो वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ AB और CD परस्पर E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि बिंदु O, E, O′ संरेखी हैं।

11. आकृति 9.20 में, O त्रिज्या 5 cm वाले वृत्त का केंद्र है, T एक बिंदु इस प्रकार है कि OT = 13 cm है तथा OT वृत्त को E पर प्रतिच्छेद करती है। यदि AB, बिंदु E पर वृत्त की एक स्पर्श रेखा है तो AB की लंबाई ज्ञात कीजिए।

आकृति 9.20

12. किसी वृत्त की बिंदु C पर खींची गई स्पर्श रेखा और व्यास AB बढ़ाने पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle PCA = 110^\circ$ है, तो $\angle CBA$ ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति 9.21)।

आकृति 9.21

[**संकेत:** बिंदु C को केंद्र O से मिलाइए।]

13. यदि त्रिज्या 9 cm वाले एक वृत्त के अंतर्गत एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC खींचा गया है, जिसमें AB = AC = 6 cm है, तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

14. केंद्र O और त्रिज्या 5 cm वाले एक वृत्त के केंद्र से 13 cm की दूरी पर एक बिंदु A है। AP और AQ क्रमशः बिंदुओं P और Q पर वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि लघु चाप PQ पर स्थित एक बिंदु R पर एक स्पर्श रेखा BC ऐसी खींची जाए, जो AP को B और AQ को C पर प्रतिच्छेद करे, तो ΔABC का परिमाप ज्ञात कीजिए।